Kombinatorik

Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung. Dieser Text soll die elementare Mengenlehre, das Konzept der Funktion und die elementare Kombinatorik zu einem Formalismus zusammenfassen, so dass sich die einzelnen Theorien gegenseitig bereichern. Um kombinatorische Einsichten zu gewinnen muss man sich natürlich auf endliche Mengen beschränken.

1 Grundlegende Prinzipien

1.1 Permutationen

Eine Permutation kann als Umordnung eines Tupels verstanden werden. Die identische Umordnung (die alles so lässt wie es ist), wollen wir auch als Umordnung zulässt ansehen. Ein Tupel aus einem einzigen Element hat daher die identische Permutation als einzige Umordnung. Ein Tupel mit zwei Elementen hat zwei Permutationen. Ein Tupel mit drei Elementen hat schon sechs.

Spätestens bei vier Elementen wird das Zählen umständlich. Bezeichnen wir die Anzahl der Permutationen eines Tupels mit n Elementen als $n!$. Fixiert man nun aber ein Element, so gibt es für die restlichen Elemente noch $n-1$ Permutationen. Bedenkt man, dass das Element an jeder der n Stellen stehen kann, so ergibt sich die Rekursionsformel

$$n! = n(n-1)!. \tag{1.1}$$

Benutzt man diese Rekursionsformel wiederholt, so ist

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n \tag{1.2}$$

unmittelbar einsichtig. Eine Permutation ist nun aber nichts anderes als eine bijektive Selbstabbildung. Das heißt folgendes. Alle Elemente des Tupels bilden eine Menge M mit $|M| = n$. Eine Permutation ist nun eine bijektive Funktion aus $\mathrm{Abb}(M, M)$. Von den Funktionen in $\mathrm{Abb}(M, M)$ sind also genau $|M|!$ bijektiv. Bezeichnet man die Menge der Bijektionen aus Abb(M, M) mit $\mathrm{Bij}(M, M)$, so ergibt sich die Formel

$$|M|! = \mathrm{Bjn}(M, M). \tag{1.3}$$

Daher kann man

$$M! := \mathrm{Bjn}(M, M) \tag{1.4}$$

definieren.

1.2 Variationen

Wir wollen jetzt die Zusammenhänge aus dem letzten Abschnitt verallgemeinern. Anstelle von Bijektionen betrachtet man nun Injektionen aus $\mathrm{Abb}(D, Z)$. Setzt man $D = Z$, so ergibt sich wieder die Menge der Bijektionen, weil injektive Selbstabbildungen auf einer endlichen Menge zwingend bijektiv sind. Man betrachtet nun die Zielmenge Z, die stets größer sein muss als der Definitionsbereich D. Von der Zielmenge zurück zum Definitionsbereich ist wie das Ablegen von $n = |Z|$ unterschiedlichen Objekten auf $k = |D|$ freie Plätze. Die elementare Kombinatorik lehrt, dass es dafür

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}} \tag{1.5}$$

Möglichkeiten gibt. Setzt man jetzt $n = k$ so ergibt sich wegen $0! = 1$ wieder $n!$. Daher gilt auch $n^{\underline{n}} = n!$.

Wenn man Wiederholungen erlaubt, so gilt stattdessen die Formel

$$V_w(n, k) = n^k. \tag{1.6}$$

Wenn man das gleiche Element aus Z nun aber auf mehrere frei Plätze von D legen kann, so bedeutet das umgekehrt, dass die Funktion nicht mehr injektiv zu sein braucht. Stattdessen ergibt sich die Menge aller Funktionen. Daher gilt

$$|Z|^{|D|} = |\mathrm{Abb}(D, Z)|. \tag{1.7}$$

Aus diesem Grund definiert man

$$Z^D := \mathrm{Abb}(D, Z) \tag{1.8}$$

sowie

$$Z^{\underline{D}} := \mathrm{Ijn}(D, Z). \tag{1.9}$$

1.3 Zahlen

Es ist sinnvoll, auch die natürlichen Zahlen durch Mengen auszudrücken. Man definiert

$$\begin{aligned}
0 &:= \{\},\\
1 &:= \{0\} = \{\{\}\},\\
2 &:= \{0,1\} = \{\{\},\{\{\}\}\},\\
3 &:= \{0,1,2\}
\end{aligned}$$

usw.

1.4 Produktmenge

Das kartesische Produkt von A, B, auch Produktmenge genannt, bezeichnet man mit $A{\times}B$. Nun gilt die Formel

$$|A\times B| = |A||B|.$$

Bezeichnet man mit A^2 die Produktmenge von A mit sich selbst und mit A^n die Potenz, so gilt $|A^n| = |A|^n$. Nun gilt aber $2 = \{0,1\}$. Daher lässt sich A^2 auch als $\mathrm{Abb}(\{0,1\},A)$ auffassen. Wie soll man das interpretieren?

Nun, ein geordnetes Paar aus A^2 ist nichts anderes als eine endliche Folge (a_0, a_1) mit Werten $a_k \in A$. Besteht der Definitionsbereich einer Funktion aus den ersten natürlichen Zahlen, so handelt es sich um eine endliche Folge.

1.5 Potenzmenge

Die Potenzmenge $P(A)$ einer endlichen Menge A hat $2^{|A|}$ Elemente. Somit kann man auch $P(A) = 2^A$ schreiben. Wegen $2 = \{0,1\}$ muss es sich bei 2^A um die Menge $\mathrm{Abb}(A,\{0,1\})$ handeln. Wie kann man das interpretieren?

Nun, eine Teilmenge $T \subseteq A$ kann als eine Indikatorfunktion χ mit Werten in $\{0,1\}$ interpretiert werden. Für jedes Element $x\in A$ sagt die Indikatorfunktion ob x zu T gehört (wahr=1) oder nicht (falsch=0). Es ist also

$$\chi(x) = [x\in A].$$

Zu jeder Teilmenge gibt es genau eine Indikatorfunktion.

Was versteht man nun unter 3^A? Nun, hier liegen die Werte der Indikatorfunktion in $\{0,1,2\}$. Die Indikatorfunktion zählt sozusagen, wie oft ein Element vorkommt. Eine solche Indikatorfunktion kann als Multimenge interpretiert werden. Bei 3^A handelt es sich also um die Multimengen über A, wobei jedes Element aus A maximal doppelt vorkommen darf.

Somit ist n^A die Menge aller Multimengen, bei denen jedes Element aus A maximal $n-1$ mal vorkommen darf.

1.6 Zahlen als Mengen von Folgen

Jede natürliche Zahl n lässt sich als n^1 schreiben. Und n^1 kann man als

$$\mathrm{Abb}(\{0\},\{0,1,\ldots,n-1\})$$

betrachten. Die Zahl b^k lässt sich als Menge aller Folgen

$$(a_0,\ldots,a_{k-1}),\qquad a_k\in\{0,\ldots,b-1\}$$

interpretieren. Das lässt sich als Darstellung der Zahlen von null bis b^k-1 betrachten, was b^k ja auch ist. Die Zahlen sind dabei mit k Ziffern zur Basis b dargestellt.

1.7 Kombinationen

Beachtet man bei den Variationen von n Elementen aus der Grundgesamtheit auf k freien Plätzen die Reihenfolge nicht mehr, so erhält man die Kombinationen $C(n,k)$. Wir wissen aber, dass es auf k Plätzen $k!$ mögliche Reihenfolgen gibt. Verschiedene Reihenfolgen werden jetzt als äquivalent betrachtet und zu einer Äquivalenzklasse zusammengefasst. Über der Menge der injektiven Funktionen ergibt sich eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen. Man spricht von einer Partition, auch Quotientenmenge genannt. Die Zahl der Äquivalenzklassen ist

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}. \tag{1.10}$$

So definiert man auch den Binomialkoeffizient, es ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!}. \tag{1.11}$$

Jetzt stellt sich noch die Frage, wie das Vergessen der Reihenfolge als Formel dargestellt werden kann, um eine klare Berechnungsvorschrift für die Quotientenmenge zu erhalten.

Die injektive Funktion ordnet ja nun jedem Platz genau eine Karte zu, wobei jeder Pfeil auf eine andere Karte zeigt. Wenn die Reihenfolge der Plätze keine Rolle spielen soll, so muss man alle Funktionen mit permutiertem Definitionsbereich als gleich ansehen. Bezeichnen wir mit σ eine Permutation aus $D!$. Nun definiert man die Äquivalenzrelation

$$f\sim g := \exists\sigma\colon f\circ\sigma = g. \tag{1.12}$$

Mit $\circ$ ist die Komposition gemeint, welche durch

$$(f \circ \sigma)(x) := f(\sigma(x)) \tag{1.13}$$

definiert ist.

Alle Permutationen bilden bezüglich der Komposition eine Gruppe, die symmetrische Gruppe S_k genannt wird. Es gilt also $D! = S_k$. Weiterhin handelt es sich bei $f \circ \sigma$ um eine Gruppenaktion. Die Permutation σ aus der symmetrischen Gruppe wirkt hierbei auf f. Man definiert nun die Menge

$$f \circ S_k := \{f \circ \sigma \mid \sigma \in S_k\}.$$

Diese Menge wird als Orbit oder Bahn von f bezeichnet. Bei den zuvor besprochenen Äquivalenzklassen handelt es sich um ebendiese Orbits.

Die Quotientenmenge ist nun genau die Menge unterschiedlicher Bahnen und wird daher als Bahnenraum bezeichnet. Die Kardinalität des Bahnenraumes ist die Anzahl der möglichen Kombinationen. Das heißt es ist

$$C(n,k) = |\{f \circ S_k \mid f \in Z^{\underline{D}}\}|. \tag{1.14}$$

An dieser Stelle tut sich eine höchst interessante Frage auf, auf welche wir jetzt noch nicht eingehen wollen. Die symmetrische Gruppe S_k hat Untergruppen U, die Permutationsgruppen genannt werden. Nun stellt sich aber die Frage, welche Formeln sich für

$$|\{f \circ U \mid f \in Z^{\underline{D}}\}| \tag{1.15}$$

ergeben. Die Antwort ist, dass diese Formeln wahrscheinlich beliebig kompliziert werden. Nach dem Satz von Cayley lässt sich nämlich jede Gruppe als Permutationsgruppe interpretieren. Und es gibt unvorstellbar komplizierte Gruppen.

Daher würde man gerne erst einmal $|U|$ für eine Untergruppe U berechnen. Der Satz von Lagrange sagt aus, dass $|U|$ schon einmal ein Teiler von $|S_k| = k!$ sein muss.

Allgemeiner gibt es beliebige Teilmengen T von S_k wo man eine Formel für

$$|\{f \circ T \mid f \in Z^{\underline{D}}\}|$$

angeben möchte, sofern T auch durch eine Formel beschrieben ist. Wir diskutieren nun, in welchen Fällen die Formel

$$|\{f \circ T \mid f \in Z^{\underline{D}}\}| = \frac{|Z^{\underline{D}}|}{|T|} \tag{1.16}$$

gilt, wobei wir uns auf Gruppen beschränken. Bei diesen gilt die Bahnformel

$$|U| = |f \circ U|\,|U_f|, \tag{1.17}$$

wobei mit U_f die Fixgruppe (auch Stabilisator genannt) von U gemeint ist. Diese ist definiert durch

$$U_f := \{\sigma \in U \mid f \circ \sigma = f\}. \tag{1.18}$$

Nun sei bei U die Fixgruppe trivial. So sagt man, wenn diese nur aus der identischen Permutation id, dem neutralen Element, besteht. In diesem Fall gilt $|f \circ U| = |U|$. Das bedeutet, jeder Orbit ist gleich groß und hat $|U|$ Elemente. Die Gesamtzahl ist aber die Anzahl der Orbits mal die Anzahl der Elemente im Orbit. Daher ergibt sich

$$|\{f \circ U \mid f \in Z^{\underline{D}}\}|\,|U| = |Z^{\underline{D}}|. \tag{1.19}$$

Damit die Formel gültig ist, reicht es also aus, wenn die Fixgruppe für jedes beliebige f trivial ist. Bei injektiven Funktionen ist das aber immer der Fall.

Die Quotientenmenge wird auch kurz als X/U bezeichnet, wobei X die Menge sein soll, auf welche die Gruppenaktion wirkt. Daher ergibt sich nun die hübsche Formel

$$|Z^{\underline{D}}/U| = \frac{|Z^{\underline{D}}|}{|U|} = \frac{n^{\underline{k}}}{|U|}. \qquad (k = |D|,\ n = |Z|) \tag{1.20}$$

Betrachten wir nun Kombinationen mit zurücklegen. Hier wir die Bedingung aufgehoben, dass die Funktionen injektiv sein müssen. Keinesfalls gilt jetzt $C_w(n,k) = n^k/k!$. Dazu muss man bedenken, dass bei mehrfachen Vorkommen von Elementen auf den k freien Plätzen die Funktion für einige Permutationen übereinstimmt. Die Fixgruppe ist also nicht mehr trivial.

Mit der Methode *Stars and bars* findet man vielmehr die Formel

$$C_w(n,k) = \binom{n+k-1}{k}. \tag{1.21}$$

1.8 Vereinigungsmenge

Ein grundlegendes Prinzip ist das Prinzip von Inklusion und Exklusion. Für die Anzahl der Elemente einer Vereinigung gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| + |A \cap B|. \tag{1.22}$$

Bei einer disjunkten Vereinigung gilt daher

$$|A \sqcup B| = |A| + |B|.$$

Mit diesem Prinzip zerlegt man nun auch

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Jetzt beachtet man noch

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ + |(A \cap B) \cap (B \cap C)|.\end{aligned}$$

Unter Beachtung von

$$(A \cap B) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &+ |A \cap B \cap C|.\end{aligned} \tag{1.23}$$

Man erkennt das folgende allgemeine Muster:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{i_1<\ldots<i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|. \tag{1.24}$$

1.9 Partitionen

Eine Menge mit n Elementen lässt sich in disjunkte Teilmengen zerlegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Und wie viele sind es, wenn die Anzahl der Teilmengen fix sein soll? Ebenso lässt sich eine natürliche Zahl aus $\mathbb{N}_1$ in eine Summe von natürlichen Zahlen aus $\mathbb{N}_1$ zerlegen. Aber wie viele solcher Summen gibt es? Und wie viele sind es, wenn die Anzahl der Summanden fix sein soll?

Zunächst wollen wir die Beziehung zwischen den Zerlegungen von Mengen und Zahlen klarstellen. Eine Summe ist gleichbedeutend mit der Vereinigung disjunkter Mengen. Hat man aber nun die Menge $\{a, b, c\}$ so gibt es folgende Zerlegungen in zwei Teilmengen:

$$\begin{aligned}&\{a\} \cup \{b, c\},\\ &\{b\} \cup \{a, c\},\\ &\{c\} \cup \{a, b\}.\end{aligned}$$

Für die Zahl drei gibt es aber nur die eine Zerlegung $1+2$. Offensichtlich bekommt man die Anzahl der Möglichkeiten für die Partition von Zahlen, wenn man bei der Partition von Mengen die Reihenfolge vergisst.

Um virtuoser rechnen zu können wollen wir Partitionen und die Menge der Partitionen als eigenständige mathematische Objekte betrachten, so wie es bei den Variationen und Kombinationen bereits erfolgt ist.

Man nimmt nun die Menge $\{a, b, c\}$ als Definitionsbereich einer Funktion. Als Zielmenge nimmt man zwei Elemente v, w. Die Funktion soll surjektiv sein. Daher ergeben sich die sechs Funktionen

$$\begin{aligned}&f_1(a) = v, \quad f_1(b) = v, \quad f_1(c) = w,\\ &f_2(a) = v, \quad f_2(b) = w, \quad f_2(c) = v,\\ &f_3(a) = w, \quad f_3(b) = v, \quad f_3(c) = v,\\ &f_4(a) = w, \quad f_4(b) = w, \quad f_4(c) = v,\\ &f_5(a) = w, \quad f_5(b) = v, \quad f_5(c) = w,\\ &f_6(a) = v, \quad f_6(b) = w, \quad f_6(c) = w.\end{aligned}$$

Bei der Zielmenge vergisst man nun die Reihenfolge. D.h. man vertauscht v und w. Die verbleibenden drei Möglichkeiten entsprechen genau den Partitionen in zwei Teilmengen.

Sei $n := |Z|$ und $k := |D|$. Bezeichne mit $\mathrm{Sjn}(D, Z)$ die Menge der Surjektionen von D nach Z. Eine Partition lässt sich nun als Orbit

$$S_n \circ f := \{\sigma \circ f \mid \sigma \in S_n\} \tag{1.25}$$

ausdrücken, wobei f eine Surjektion sein soll. Die Menge der Partitionen ist daher beschrieben durch

$$\{S_n \circ f \mid f \in \mathrm{Sjn}(D, Z)\}. \tag{1.26}$$

Die Zahlen

$$\left\{\begin{matrix}k\\n\end{matrix}\right\} := |\{S_n \circ f \mid f \in \mathrm{Sjn}(D, Z)\}| \tag{1.27}$$

heißen Stirling-Zahlen zweiter Art. Wir wollen sie als Partitionszahlen bezeichnen. Die Zahlen

$$B_k := \sum_{n=0}^{k} \left\{\begin{matrix}k\\n\end{matrix}\right\} \tag{1.28}$$

werden als Bellzahlen bezeichnet. Die Bellzahl B_k ist die gesamte Anzahl an Möglichkeiten, eine Menge in disjunkte Teilmengen zu zerlegen.

Bei den Partitionen von Zahlen muss die Reihenfolge des Definitionsbereiches auch noch vergessen werden. Somit ergibt sich die Darstellung

$$p\binom{k}{n} := |\{S_n \circ f \circ S_k \mid f \in \mathrm{Sjn}(D, Z)\}|. \tag{1.29}$$

Die Funktion $p(k, n)$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, die Zahl k in n Summanden zu zerlegen. Die Funktion

$$p(k) := \sum_{n=1}^{k} p\binom{k}{n} \tag{1.30}$$

wird als Partitionsfunktion bezeichnet. Die Zahl $p(k)$ ist die gesamte Anzahl an Möglichkeiten, die Zahl k in Summanden zu zerlegen.

1.10 Twelvefold way

Die bisher dargestellten Prinzipien lassen sich übersichtlich zu einer Tabelle zusammenfassen, die als *Twelvefold way* bezeichnet wird. Es handelt sich um eine Tabelle mit 4×3 Einträgen, die noch Lücken enthält, welche sich sinnvoll ausfüllen lassen. Man kann von einer Art Periodensystem, dem Periodensystem der Kombinatorik sprechen.

2 Grundlegende Werkzeuge

2.1 Dreieckszahlen

Dreieckszahlen sind Zahlen die man wie beim pascalschen Dreieck als Dreiecksschema anordnen kann. Dies beruht im wesentlichen auf einer Rekursionsformel in zwei Variablen.

Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{2.1}$$

Zykelzahlen (Stirling-Zahlen erster Art):

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Partitionszahlen (Stirling-Zahlen zweiter Art):

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

Zahlpartitionen:

$$p\binom{n}{k} = p\binom{n-1}{k-1} + p\binom{n-k}{k} \tag{2.4}$$

Es gibt ziemlich viele Formeln für diese Zahlen. Einige davon drücken Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Dreieckszahlen aus. In *Concrete Mathematics* beschäftigt sich ein 90-seitiges Kapitel allein mit Binomialkoeffizienten.

2.2 Erzeugende Funktionen

Viele Probleme der Kombinatorik lassen sich zunächst als rekursiv definierte Folge formulieren. Betrachten wir nun erst einmal die endliche Folge

$$(a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Diese Folge ist ein Tupel mit vier Elementen und lässt sich daher auch als Punkt im Koordinatenraum der Dimension vier darstellen. Die kanonische Basis lässt sich mit der Polynombasis identifizieren. Daher lässt sich das Tupel als Linearkombination

$$a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3$$

schreiben. Die endliche Folge lässt sich damit als ein Element des Polynomringes $R[X]$ mit $a_k \in R$ interpretieren.

Diese Linearkombination wird nun ins unendliche fortgesetzt. D.h. man bildet

$$G\{a_k\}(X) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k. \tag{2.5}$$

Die Menge der Folgen wird damit als Menge der formalen Potenzreihen $R[[X]]$ interpretiert.

Jede endliche Folge lässt sich auch darin einbetten. Geht die Folge z.B. bis zum Index $N = 3$, so lässt sich die Folge für alle $k > N$ einfach durch $a_k = 0$ erweitern.

Man kann nun die formale Variable X gegen eine tatsächliche Variable x ersetzen und die entstehende Funktion betrachten. Diese nennt man dann erzeugende Funktion der Folge. Macht man anstelle von $X = x$ die Substitution $X = 1/z$, so ergibt sich die Z-Transformation. Behandelt man X jedoch formal und benutzt sich formale Identitäten, so spielen Konvergenzfragen keine rolle.

Tatsächlich gelten viele Identitäten auch formal, so dass eine solche Substitution nicht notwendig ist. Dazu muss man aber erst einmal klären wie man formale Potenzreihen multipliziert.

Die Multiplikation ergibt sich in völliger Analogie zur Multiplikation von Polynomen und ist mit dieser kompatibel. Diese Erweiterung der Multiplikation auf Potenzreihen wird als Cauchy-Produkt bezeichnet.

Weitere Informationen findet man im englischen Wikipediaartikel *Formal power series.*

2.3 Operatoren

Es gibt einige Operatoren, die man auf Folgen bzw. formale Potenzreihen wirken lassen kann. Mit diesen lassen sich höhere Identitäten formulieren, die gewinnbringed tieferliegende Zusammenhänge herausstellen. Anstelle von a_k wollen wir hier $f(k)$ schreiben.

Der Identitätsoperator ist definiert durch

$$(If)(k) := f(k). \tag{2.6}$$

Der Translationsoperator ist definiert durch

$$(T_n f)(k) := f(k+n). \tag{2.7}$$

Der Differenzenoperator ist definiert durch

$$(\Delta_n f)(k) := f(k+n) - f(k). \tag{2.8}$$

Arithmetische Operationen mit Operatoren erklärt man Punktweise. Sind z.B. A, B zwei Operatoren, so definiert man die Summe $A + B$ durch

$$((A+B)f)(k) := (Af)(k) + (Bf)(k). \tag{2.9}$$

Somit ergibt sich die Operatorengleichung

$$\Delta_n = T_n - I. \tag{2.10}$$

Ferner gilt nun

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= (T_n - I)^2 = T_n^2 - T_n I - I T_n + I^2 \\ &= T_{2n} - 2T_n + I. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Für jeden Operator A setzt man $A^0 := I$. So ist auch $T_n^0 = T_0 = I$. Da Translationsoperator und Identitätsoperator kommutieren, kann man den binomischen Lehrsatz verwenden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta_n^m = (T_n - I)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} T_n^k (-I)^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T_{kn}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Den formalen Ableitungsoperator erklärt man durch

$$D\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\Big) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k k X^{k-1}. \tag{2.13}$$

Literatur

[1] Graham, Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics.

[2] Richard P. Stanley: Enumerative Combinatorics. (online)

[3] Michael Stoll: Abzählende Kombinatorik. (online)

[4] Wikipedia: Formal power series.