Metatheoreme über die Aussagenlogik

Definition. Interpretation. Eine *Interpretation* $I\colon V \to \{0, 1\}$ ist eine Abbildung, die jeder logischen Variablen einen Wahrheitswert zuordnet. Anstelle von Interpretation spricht man auch von einer *Belegung*.

Der Definitionsbereich einer Interpretation wird wie folgt auf die Menge aller wohlgeformten Formeln erweitert:

$$\begin{aligned}
I(0) &= 0,\\
I(1) &= 1,\\
I(\neg\varphi) &= (\neg I(\varphi)),\\
I(\varphi \wedge \psi) &= (I(\varphi) \wedge I(\psi)),\\
I(\varphi \vee \psi) &= (I(\varphi) \vee I(\psi)),\\
I(\varphi \rightarrow \psi) &= (I(\varphi) \rightarrow I(\psi)),\\
I(\varphi \leftrightarrow \psi) &= (I(\varphi) \leftrightarrow I(\psi)).
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der jeweiligen Zeile wird hierbei mittels ihrer Wahrheitstafel ausgewertet.

Für eine Formel φ sind die Interpretationen nichts anderes als die Zeilen der Wahrheitstafel zu φ.

Definition. Modell. Eine Interpretation I heißt *Modell* der Formel φ, wenn $I(\varphi) = 1$ ist.

Definition. Modellrelation. Ist jede Interpretation, die ein Modell jeder Formel der Formelmenge

$$\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

ist, auch ein Modell von ψ, dann sagt man, Γ *modelliert* ψ, und schreibt:

$$\Gamma \models \psi.$$

Definition. Tautologische Formel. Eine Formel, welche unter jeder beliebigen Interpretation gültig ist, heißt *tautologisch*. Kurz:

$$(\models \varphi) \iff \forall I(I(\varphi) = 1).$$

Das heißt:

$$(\models \varphi) \iff (\{\} \models \varphi).$$

Anders ausgedrückt: Eine Formel ist genau dann tautologisch, wenn jede Zeile der Wahrheitstafel am Ende erfüllt wird. Dieses einfache Verfahren ist Elektronikern bereits aus der Schaltalgebra bekannt.

Es gelten Metatheoreme.

Korrektheit der Aussagenlogik. Es gilt:

$$(\Gamma \vdash \psi) \implies (\Gamma \models \psi).$$

Das heißt, jede Formel die sich unter Verwendung von Schlussregeln und bereits gezeigten Sätzen syntaktisch aus Γ ableiten lässt, wird auch durch Γ modelliert.

Vollständigkeit der Aussagenlogik. Es gilt:

$$(\Gamma \models \psi) \implies (\Gamma \vdash \psi).$$

Deduktionstheorem (syntaktisch). Es gilt:

$$(\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \iff (\Gamma \vdash \varphi \to \psi).$$

Infolge gilt auch:

$$(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi) \iff (\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi).$$

Deduktionstheorem (semantisch). Es gilt:

$$(\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi) \iff (\Gamma \models \varphi \to \psi).$$

Infolge gilt auch:

$$(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi) \iff (\models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi).$$

Mit dem Deduktionstheorem ist genauer die Folgerung von links nach rechts gemeint. Die Folgerung von rechts nach links wird dann Umkehrung des Deduktionstheorems genannt.

Einsetzungsregel. Sei v eine metasprachliche Variable, welche für eine objektsprachliche Variable steht. Ist φ eine tautologische Formel, dann ergibt sich auch eine tautologische Formel, wenn man jedes Auftreten von v in φ gegen die Formel ψ ersetzt. Kurz:

$$(\models \varphi) \implies (\models \varphi[v := \psi]).$$

Allgemeiner gilt die Einsetzungsregel auch für simultane Einsetzungen:

$$(\models \varphi) \implies (\models \varphi[v_1 := \psi_1, \ldots, v_n := \psi_n]).$$

Die Metatheoreme überschatten die Aussagenlogik. Ihre Reichhaltigkeit macht sich dadurch bemerkbar, dass sie es gestatten, objektsprachliche Formeln in metasprachliche Schlussregeln umzuwandeln.

Beispiel. Als Anwendungsbeispiel wollen wir den Modus ponens zeigen. Zunächst überzeugen wir uns mittels einer Wahrheitstafel, dass

$$\models A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

gilt.

Mit der Einsetzungsregel ersetzen wir die beiden Variablen simultan gegen Formeln. Es ergibt sich

$$\models \varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi.$$

Wir nutzen nun die Vollständigkeit und gewinnen:

$$\vdash \varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi.$$

Anwendung des Deduktionstheorems bringt uns schließlich den Modus ponens:

$$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi.$$

Soeben wurde ein einfaches Verfahren skizziert, das es gestattet, neue Schlussregeln zu gewinnen.

Die Metatheoreme erlauben es uns, die Aussagenlogik besser zu beherrschen als es mit alleinigen Anwendung eines Kalküls möglich wäre.

Ende.