Natürliches Schließen

Teil 5: Modallogik

Formeln der Modallogik

Die Modallogik fügt zu den Junktoren der Aussagenlogik zwei einstellige Operatoren hinzu:

Aussage	Lesung
$\Box A$	notwendigerweise A
$\Diamond A$	möglicherweise A

Zur Syntax: Beiden kommt die höchste Operatorrangfolge zu, also dieselbe wie der Negation.

System K

Es gibt unterschiedliche modallogische Systeme. Eine große Familie[1] baut auf dem System K auf, womit man K als grundlegend betrachten kann. Insofern wollen wir zunächst K diskutieren, bevor wir uns den anderen Systemen zuwenden.

Das formale System K entsteht dadurch, dass sämtliche Regeln und Axiome der Aussagenlogik weiterhin erhalten bleiben und diesen lediglich eine weitere Regel (Regel N) und ein weiteres Axiom[2] (Axiom K) hinzugefügt werden.

[1] Die Familie der normalen Modallogiken.

[2] Eigentlich ein Axiomenschema, da man beliebige Formeln einfügen darf.

Es gibt unterschiedliche modallogische Systeme. Eine große Familie[1] baut auf dem System K auf, womit man K als grundlegend betrachten kann. Insofern wollen wir zunächst K diskutieren, bevor wir uns den anderen Systemen zuwenden.

Das formale System K entsteht dadurch, dass sämtliche Regeln und Axiome der Aussagenlogik weiterhin erhalten bleiben und diesen lediglich eine weitere Regel (Regel N) und ein weiteres Axiom[2] (Axiom K) hinzugefügt werden.

Regel N (Nezessisierungsregel)

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$$

In Worten: Ist eine Formel ein Theorem, so soll deren Notwendigkeit ebenfalls ein Theorem sein.

[1] Die Familie der normalen Modallogiken.

[2] Eigentlich ein Axiomenschema, da man beliebige Formeln einfügen darf.

Axiom K (Axiom der Verteilung)

$$\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Axiom K (Axiom der Verteilung)

$$\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Wir dürfen aus diesem Axiom wie üblich per Modus ponens eine zulässige Schlussregel ableiten:

Regel K

$$\frac{\Gamma \vdash \Box(A \to B)}{\Gamma \vdash \Box A \to \Box B}$$

Eine erste Aufgabe. Gesucht ist der Beweis von

$$\vdash \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A.$$

Man findet:

Eine erste Aufgabe. Gesucht ist der Beweis von

$$\vdash \Box(A \land B) \to \Box A.$$

Man findet:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \land B \vdash A \land B}}{A \land B \vdash A}}{\vdash A \land B \to A}}{\vdash \Box(A \land B \to A)}\,\mathrm{N}}{\vdash \Box(A \land B) \to \Box A}\,\mathrm{K}$$

Eine erste Aufgabe. Gesucht ist der Beweis von

$$\vdash \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A.$$

Man findet:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \wedge B \vdash A \wedge B}}{A \wedge B \vdash A}}{\vdash A \wedge B \rightarrow A}}{\vdash \Box(A \wedge B \rightarrow A)}\,\mathrm{N}}{\vdash \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A}\,\mathrm{K}$$

Frage: Ist $\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$ ebenfalls beweisbar?

Eine erste Aufgabe. Gesucht ist der Beweis von

$$\vdash \Box(A \land B) \to \Box A.$$

Man findet:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \land B \vdash A \land B}}{A \land B \vdash A}}{\vdash A \land B \to A}}{\vdash \Box(A \land B \to A)}\,\mathrm{N}}{\vdash \Box(A \land B) \to \Box A}\,\mathrm{K}$$

Frage: Ist $\Box A \land \Box B \to \Box(A \land B)$ ebenfalls beweisbar? Ja, ist sie. Zur Ausführung benötigen wir allerdings eine kurze Vorbereitung.

Wir bestätigen zunächst einmal die Regel

$$\frac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash \Box A \to (\Box B \to \Box C)}.$$

Es findet sich:

Wir bestätigen zunächst einmal die Regel

$$\frac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash \Box A \to (\Box B \to \Box C)}.$$

Es findet sich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash \Box(A \to (B \to C))}\,\mathrm{N}}{\vdash \Box A \to \Box(B \to C)}\,\mathrm{K} \qquad \dfrac{}{\Box A \vdash \Box A}}{\Box A \vdash \Box(B \to C)}}{\Box A \vdash \Box B \to \Box C}\,\mathrm{K}}{\vdash \Box A \to (\Box B \to \Box C)}$$

Beachtet man nun die allgemeine Äquivalenz von $A \wedge B \to C$ und $A \to (B \to C)$, erhält man die Regel in der Form

$$\frac{\vdash A \wedge B \to C}{\vdash \Box A \wedge \Box B \to \Box C}.$$

Hiermit gelingt die gesuchte Ableitung kurzerhand:

Beachtet man nun die allgemeine Äquivalenz von $A \wedge B \to C$ und $A \to (B \to C)$, erhält man die Regel in der Form

$$\frac{\vdash A \wedge B \to C}{\vdash \Box A \wedge \Box B \to \Box C}.$$

Hiermit gelingt die gesuchte Ableitung kurzerhand:

$$\cfrac{\cfrac{\overline{A \wedge B \vdash A \wedge B}}{\vdash A \wedge B \to A \wedge B}}{\vdash \Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)}$$

Im Fortgang zur gemachten Überlegung finden wir eine verallgemeinerte Regel der Nezessisierung.

Regel N*

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash B}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \vdash \Box B}$$

Im Fortgang zur gemachten Überlegung finden wir eine verallgemeinerte Regel der Nezessisierung.

Regel N*

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash B}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \vdash \Box B}$$

Beweis. Induktion über n. Im Anfang $n = 0$ nimmt die Regel schlicht die Form der Nezessisierungsregel an. Den Induktionsschritt bestätigt der Beweisbaum:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \vdash B}{A_1, \ldots, A_n \vdash A_{n+1} \to B}}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \vdash \Box(A_{n+1} \to B)}\,\text{IV}}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \vdash \Box A_{n+1} \to \Box B}\,\text{K} \qquad \dfrac{}{\Box A_{n+1} \vdash \Box A_{n+1}}}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Box A_{n+1} \vdash \Box B}$$

Nun zur Möglichkeit. Sie wird auf eine Formel mit einer Notwendigkeit zurückgeführt.

Definition der Möglichkeit

$$\Diamond A :\equiv \neg\Box\neg A$$

Nun zur Möglichkeit. Sie wird auf eine Formel mit einer Notwendigkeit zurückgeführt.

Definition der Möglichkeit

$$\Diamond A :\equiv \neg\Box\neg A$$

Man bestätigt mühelos die Äquivalenz $\Diamond\neg A \equiv \neg\Box A$, sofern die Beseitigung der Doppelnegation gewährt ist.

Nun zur Möglichkeit. Sie wird auf eine Formel mit einer Notwendigkeit zurückgeführt.

Definition der Möglichkeit

$$\Diamond A :\equiv \neg\Box\neg A$$

Man bestätigt mühelos die Äquivalenz $\Diamond\neg A \equiv \neg\Box A$, sofern die Beseitigung der Doppelnegation gewährt ist. Nämlich findet sich die äquivalente Umformung

$$\Diamond\neg A \equiv \neg\Box\neg\neg A \equiv \neg\Box A.$$

Wir wollen die Äquivalenz aber nochmals durch Beweisbäume herstellen.

Nun zur Möglichkeit. Sie wird auf eine Formel mit einer Notwendigkeit zurückgeführt.

Definition der Möglichkeit

$$\Diamond A :\equiv \neg\Box\neg A$$

Man bestätigt mühelos die Äquivalenz $\Diamond\neg A \equiv \neg\Box A$, sofern die Beseitigung der Doppelnegation gewährt ist. Nämlich findet sich die äquivalente Umformung

$$\Diamond\neg A \equiv \neg\Box\neg\neg A \equiv \neg\Box A.$$

Wir wollen die Äquivalenz aber nochmals durch Beweisbäume herstellen.

Bemerkung. Gleichermaßen erhält man $\neg\Diamond\neg A \equiv \Box A$ mit der Umformung

$$\neg\Diamond\neg A \equiv \neg\neg\Box\neg\neg A \equiv \Box A.$$

Zu $\Diamond\neg A \rightarrow \neg\Box A$ findet sich:

Zu $\Diamond\neg A \to \neg\Box A$ findet sich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A \to \neg\neg A}\ \text{bekanntlich}}{\vdash \Box(A \to \neg\neg A)}\ \text{N}}{\vdash \Box A \to \Box\neg\neg A}\ \text{K}}{\vdash \neg\Box\neg\neg A \to \neg\Box A}\ \text{Kontraposition}}{\vdash \Diamond\neg A \to \neg\Box A}\ \text{Def.}$$

Zu $\Diamond\neg A \to \neg\Box A$ findet sich:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\vdash A \to \neg\neg A}\ \text{bekanntlich}}{\vdash \Box(A \to \neg\neg A)}\ \text{N}}{\vdash \Box A \to \Box\neg\neg A}\ \text{K}}{\vdash \neg\Box\neg\neg A \to \neg\Box A}\ \text{Kontraposition}}{\vdash \Diamond\neg A \to \neg\Box A}\ \text{Def.}$$

Für $\neg\Box A \to \Diamond\neg A$ benötigen wir nun die Beseitigung der Doppelnegation:

Zu $\Diamond\neg A \to \neg\Box A$ findet sich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash A \to \neg\neg A}\ \text{bekanntlich}}{\vdash \Box(A \to \neg\neg A)}\ \text{N}}{\vdash \Box A \to \Box\neg\neg A}\ \text{K}}{\vdash \neg\Box\neg\neg A \to \neg\Box A}\ \text{Kontraposition}}{\vdash \Diamond\neg A \to \neg\Box A}\ \text{Def.}$$

Für $\neg\Box A \to \Diamond\neg A$ benötigen wir nun die Beseitigung der Doppelnegation:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash \neg\neg A \to A}\ \text{DN}}{\vdash \Box(\neg\neg A \to A)}\ \text{N}}{\vdash \Box\neg\neg A \to \Box A}\ \text{K}}{\vdash \neg\Box A \to \neg\Box\neg\neg A}\ \text{Kontraposition}}{\vdash \neg\Box A \to \Diamond\neg A}\ \text{Def.}$$

Die Äquivalenz $\Box\neg A \equiv \neg\Diamond A$ ist ebenfalls unschwer zu bestätigen.

Es findet sich:

Die Äquivalenz $\Box\neg A \equiv \neg\Diamond A$ ist ebenfalls unschwer zu bestätigen.

Es findet sich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash B \to \neg\neg B}\ \text{bekanntlich}}{\vdash \Box\neg A \to \neg\neg\Box\neg A}\ B := \Box\neg A}{\vdash \Box\neg A \to \neg\Diamond A}\ \text{Def.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg\neg B \to B}\ \text{DN}}{\vdash \neg\neg\Box\neg A \to \Box\neg A}\ B := \Box\neg A}{\vdash \neg\Diamond A \to \Box\neg A}\ \text{Def.}}{\vdash \Box\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond A}$$

Die Äquivalenz $\Box\neg A \equiv \neg\Diamond A$ ist ebenfalls unschwer zu bestätigen.

Es findet sich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash B \to \neg\neg B}\;\text{bekanntlich}}{\vdash \Box\neg A \to \neg\neg\Box\neg A}\;B := \Box\neg A}{\vdash \Box\neg A \to \neg\Diamond A}\;\text{Def.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg\neg B \to B}\;\text{DN}}{\vdash \neg\neg\Box\neg A \to \Box\neg A}\;B := \Box\neg A}{\vdash \neg\Diamond A \to \Box\neg A}\;\text{Def.}$$

$$\dfrac{\vdash \Box\neg A \to \neg\Diamond A \qquad \vdash \neg\Diamond A \to \Box\neg A}{\vdash \Box\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond A}$$

Bemerkung. Man kann diese Regeln als Analogon zu den de morganschen Gesetzen $\neg\forall x\colon P(x) \equiv \exists x\colon \neg P(x)$ und $\neg\exists x\colon P(x) \equiv \forall x\colon \neg P(x)$ auffassen.

Weiterhin zeigt sich die Formel $\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$ als beweisbar.

Man zieht hierfür zweimal die Regel der Kontraposition heran:

Weiterhin zeigt sich die Formel $\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$ als beweisbar.

Man zieht hierfür zweimal die Regel der Kontraposition heran:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\Box(A \to B) \vdash \Box(A \to B)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Kontraposition}
\UnaryInfC{$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$}
\RightLabel{N}
\UnaryInfC{$\vdash \Box((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$}
\RightLabel{K}
\UnaryInfC{$\vdash \Box(A \to B) \to \Box(\neg B \to \neg A)$}
\BinaryInfC{$\Box(A \to B) \vdash \Box(\neg B \to \neg A)$}
\RightLabel{K}
\UnaryInfC{$\Box(A \to B) \vdash \Box\neg B \to \Box\neg A$}
\RightLabel{Kontraposition}
\UnaryInfC{$\Box(A \to B) \vdash \neg\Box\neg A \to \neg\Box\neg B$}
\RightLabel{Def.}
\UnaryInfC{$\Box(A \to B) \vdash \Diamond A \to \Diamond B$}
\UnaryInfC{$\vdash \Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$}
\end{prooftree}
$$

Zusätzliche Axiome

Kürzel	**Axiom**
T	$\vdash \Box A \rightarrow A$
B	$\vdash A \rightarrow \Box\Diamond A$
D	$\vdash \Box A \rightarrow \Diamond A$
4	$\vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$
5	$\vdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

System	**Axiome**
K	K
T	K, T
B	K, T, B
D	K, D
S4	K, T, 4
S5	K, T, 5

Das Axiom T impliziert $A \to \Diamond A$. Nämlich findet sich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \Box B \to B}\,\mathrm{T}}{\vdash \Box\neg A \to \neg A}\,B := \neg A}{\vdash \neg\neg A \to \neg\Box\neg A}\,\text{Kontraposition}}{\vdash \neg\neg A \to \Diamond A}\,\text{Def.} \qquad \dfrac{}{A \vdash \neg\neg A}}{A \vdash \Diamond A}}{\vdash A \to \Diamond A}$$

Das Axiom T impliziert $A \to \Diamond A$. Nämlich findet sich:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \Box B \to B}\,\mathrm{T}}{\vdash \Box\neg A \to \neg A}\,B := \neg A}{\vdash \neg\neg A \to \neg\Box\neg A}\,\text{Kontraposition}}{\vdash \neg\neg A \to \Diamond A}\,\text{Def.}
\qquad
\dfrac{}{A \vdash \neg\neg A}
}{
\dfrac{A \vdash \Diamond A}{\vdash A \to \Diamond A}
}
$$

Ist die Beseitigung der Doppelnegation gewährt, impliziert $A \to \Diamond A$ umgekehrt das Axiom T. Nämlich findet sich:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\vdash B \to \Diamond B}{\vdash \neg A \to \Diamond\neg A}\,B := \neg A}{\vdash \neg\Diamond\neg A \to \neg\neg A}\,\text{Kontraposition}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash \neg\neg A}}{\Box A \vdash \Box\neg\neg A}\,\mathrm{N}^*}{\Box A \vdash \neg\neg\Box\neg\neg A}}{\Box A \vdash \neg\Diamond\neg A}\,\text{Def.}
}{
\dfrac{\dfrac{\Box A \vdash \neg\neg A}{\Box A \vdash A}\,\mathrm{DN}}{\vdash \Box A \to A}
}
$$

Mit der gemachten Vorbetrachtung findet man nun mühelos, dass Axiom B in System S5 ableitbar ist. Der Beweisbaum ist:

Mit der gemachten Vorbetrachtung findet man nun mühelos, dass Axiom B in System S5 ableitbar ist. Der Beweisbaum ist:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A \rightarrow \Diamond A}\,\mathrm{T} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash \Diamond A}}{A \vdash \Box\Diamond A}\,5}{\vdash A \rightarrow \Box\Diamond A}$$

Bzw. als schlichter Kettenschluss:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A \rightarrow \Diamond A}\,\mathrm{T} \qquad \dfrac{}{\vdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A}\,5}{\vdash A \rightarrow \Box\Diamond A}\,\text{Kettenschluss}$$

Ferner stellt sich heraus, dass Axiom 4 im System S5 ableitbar ist. Wir nutzen dazu die Feststellung $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$ als Hilfsmittel. Alternativ ginge es auch, die zulässige Ersetzungsregel mit $\neg\neg A \equiv A$ zu nutzen — wir verzichten drauf, da sie in Beweisassistenten nicht unbedingt direkt zur Verfügung steht.

Der Beweisbaum fällt ein wenig länger aus:

Ferner stellt sich heraus, dass Axiom 4 im System S5 ableitbar ist. Wir nutzen dazu die Feststellung $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$ als Hilfsmittel. Alternativ ginge es auch, die zulässige Ersetzungsregel mit $\neg\neg A \equiv A$ zu nutzen — wir verzichten drauf, da sie in Beweisassistenten nicht unbedingt direkt zur Verfügung steht.

Der Beweisbaum fällt ein wenig länger aus:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{B}
\UnaryInfC{$\vdash B \to \Box\Diamond B$}
\RightLabel{$B := \Box A$}
\UnaryInfC{$\vdash \Box A \to \Box\Diamond\Box A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\Box A \to \Diamond\neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{5}
\UnaryInfC{$\vdash \Diamond B \to \Box\Diamond B$}
\RightLabel{$B := \neg A$}
\UnaryInfC{$\vdash \Diamond\neg A \to \Box\Diamond\neg A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$}
\UnaryInfC{$\vdash \Diamond\neg A \to \neg\Box A$}
\RightLabel{N, K}
\UnaryInfC{$\vdash \Box\Diamond\neg A \to \Box\neg\Box A$}
\RightLabel{Kettenschluss}
\BinaryInfC{$\vdash \Diamond\neg A \to \Box\neg\Box A$}
\RightLabel{Kettenschluss}
\BinaryInfC{$\vdash \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$}
\RightLabel{Kontraposition}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\Box\neg\Box A \to \neg\neg\Box A$}
\RightLabel{DN}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\Box\neg\Box A \to \Box A$}
\RightLabel{Def.}
\UnaryInfC{$\vdash \Diamond\Box A \to \Box A$}
\RightLabel{N, K}
\UnaryInfC{$\vdash \Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$}
\RightLabel{Kettenschluss}
\BinaryInfC{$\vdash \Box A \to \Box\Box A$}
\end{prooftree}
$$

Literatur

- Johan van Benthem: *Modal Logic: A Contemporary View*. In: *The Internet Encyclopedia of Philosophy*.
- James Garson: *Modal Logic*. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Open Logic Project: *The Open Logic Text*. Part XI, *Normal Modal Logics*.

Ende.

Dezember 2022