Natürliches Metaschließen

Juli 2024

Motivation

Das Beweisen von Theoremen geschieht vermittels Schlussregeln. Darüber hinaus erweisen sie sich aber auch zur Ableitung neuer Schlussregeln als dienlich.

Das Beweisen von Theoremen geschieht vermittels Schlussregeln. Darüber hinaus erweisen sie sich aber auch zur Ableitung neuer Schlussregeln als dienlich.

Beispiel. Als gegeben vorausgesetzt seien die beiden Regeln

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,(\text{Schnitt}), \qquad \frac{}{A, B \vdash A \land B}.$$

Das Beweisen von Theoremen geschieht vermittels Schlussregeln. Darüber hinaus erweisen sie sich aber auch zur Ableitung neuer Schlussregeln als dienlich.

Beispiel. Als gegeben vorausgesetzt seien die beiden Regeln

$$\frac{\Gamma\vdash A \qquad \Gamma, A\vdash B}{\Gamma\vdash B}\,\text{(Schnitt)},\qquad \frac{}{A, B\vdash A\land B}.$$

Nun wird man die Regel

$$\frac{\Gamma\vdash A \qquad \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\land B}$$

unschwer als zulässig befinden, denn

Das Beweisen von Theoremen geschieht vermittels Schlussregeln. Darüber hinaus erweisen sie sich aber auch zur Ableitung neuer Schlussregeln als dienlich.

Beispiel. Als gegeben vorausgesetzt seien die beiden Regeln

$$\frac{\Gamma\vdash A \qquad \Gamma, A\vdash B}{\Gamma\vdash B}\,\text{(Schnitt)},\qquad \frac{}{A, B\vdash A\land B}.$$

Nun wird man die Regel

$$\frac{\Gamma\vdash A \qquad \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\land B}$$

unschwer als zulässig befinden, denn es findet sich der Herleitungsbaum

$$\dfrac{\Gamma\vdash A \qquad \dfrac{\Gamma\vdash B \qquad \dfrac{}{A, B\vdash A\land B}}{\Gamma, A\vdash A\land B}\,\text{Schnitt}}{\Gamma\vdash A\land B}\,\text{Schnitt}.$$

Das Beweisen von Theoremen geschieht vermittels Schlussregeln. Darüber hinaus erweisen sie sich aber auch zur Ableitung neuer Schlussregeln als dienlich.

Beispiel. Als gegeben vorausgesetzt seien die beiden Regeln

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,\text{(Schnitt)}, \qquad \frac{}{A, B \vdash A \land B}.$$

Nun wird man die Regel

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}$$

unschwer als zulässig befinden, denn es findet sich der Herleitungsbaum

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B \qquad \dfrac{}{A, B \vdash A \land B}}{\Gamma, A \vdash A \land B}\,\text{Schnitt}}{\Gamma \vdash A \land B}\,\text{Schnitt.}$$

Allerdings besteht hierbei ein technisches Problem:
Es wurde aus Prämissen eine Konklusion hergeleitet.

Das Beweisen von Theoremen geschieht vermittels Schlussregeln. Darüber hinaus erweisen sie sich aber auch zur Ableitung neuer Schlussregeln als dienlich.

Beispiel. Als gegeben vorausgesetzt seien die beiden Regeln

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,(\text{Schnitt}), \qquad \frac{}{A, B \vdash A \land B}.$$

Nun wird man die Regel

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}$$

unschwer als zulässig befinden, denn es findet sich der Herleitungsbaum

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B \qquad \dfrac{}{A, B \vdash A \land B}}{\Gamma, A \vdash A \land B}\,\text{Schnitt}}{\Gamma \vdash A \land B}\,\text{Schnitt}.$$

Allerdings besteht hierbei ein technisches Problem:
Es wurde aus Prämissen eine Konklusion hergeleitet.

Die Herleitung findet eigentlich innerhalb der Metalogik statt.

Die Herleitung findet eigentlich innerhalb der Metalogik statt.

Warum dies ein Problem darstellen sollte?

Die Herleitung findet eigentlich innerhalb der Metalogik statt.

Warum dies ein Problem darstellen sollte? *Wenn wir einen Theorembeweisverifizierer verwenden, der lediglich die Gegenstandslogik versteht, bleibt uns die metalogische Ebene verwehrt.*

Die Herleitung findet eigentlich innerhalb der Metalogik statt.

Warum dies ein Problem darstellen sollte? *Wenn wir einen Theorembeweisverifizierer verwenden, der lediglich die Gegenstandslogik versteht, bleibt uns die metalogische Ebene verwehrt.*

Klären wir zunächst kurz ab, was bislang unausgesprochen blieb.

Um die Metalogik als natürliches Schließen zu formalisieren, notieren wir

$$S_1,\ldots,S_n \Vdash S$$

als Metasequenz, womit das Urteil gemeint sei, dass die Sequenz S aus den Sequenzen S_1 bis S_n ableitbar ist.

Um die Metalogik als natürliches Schließen zu formalisieren, notieren wir

$$S_1, \ldots, S_n \Vdash S$$

als Metasequenz, womit das Urteil gemeint sei, dass die Sequenz S aus den Sequenzen S_1 bis S_n ableitbar ist.

Die eigentliche Gestalt der Herleitung klärt sich nun als

$$\dfrac{\dfrac{}{(\Gamma \vdash A) \Vdash (\Gamma \vdash A)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\Gamma \vdash B) \Vdash (\Gamma \vdash B)} \qquad \dfrac{}{\Vdash (A, B \vdash A \land B)}}{(\Gamma \vdash B) \Vdash (\Gamma, A \vdash A \land B)}\,\text{Schnitt}}{(\Gamma \vdash A), (\Gamma \vdash B) \Vdash (\Gamma \vdash A \land B)}\,\text{Schnitt.}$$

Infolgedessen muss aber jede der Schlussregeln eine Entsprechung in der Metalogik induzieren. Das heißt, liegt eine Schlussregel

$$\frac{S_1 \qquad S_2 \qquad \ldots \qquad S_n}{S}$$

vor, muss in der Metalogik die entsprechende Regel

$$\frac{\Delta \Vdash S_1 \qquad \Delta \Vdash S_2 \qquad \ldots \qquad \Delta \Vdash S_n}{\Delta \Vdash S}$$

zur Verfügung stehen.

Infolgedessen muss aber jede der Schlussregeln eine Entsprechung in der Metalogik induzieren. Das heißt, liegt eine Schlussregel

$$\frac{S_1 \qquad S_2 \qquad \ldots \qquad S_n}{S}$$

vor, muss in der Metalogik die entsprechende Regel

$$\frac{\Delta \Vdash S_1 \qquad \Delta \Vdash S_2 \qquad \ldots \qquad \Delta \Vdash S_n}{\Delta \Vdash S}$$

zur Verfügung stehen.

Bemerkung. Bei Einbeziehung der Abschwächungsregel nimmt sie die Form

$$\frac{\Delta_1 \Vdash S_1 \qquad \Delta_2 \Vdash S_2 \qquad \ldots \qquad \Delta_n \Vdash S_n}{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \Vdash S}$$

an, wie sie gerade genutzt wurde.

Ein logischer Kalkül

Folgende Idee: Angenommen, das metalogische System beschreibt dieselbe Logik wie die Gegenstandslogik, dann erscheint es zielführend, das metalogische System in die Gegenstandslogik zu verschieben.

Folgende Idee: Angenommen, das metalogische System beschreibt dieselbe Logik wie die Gegenstandslogik, dann erscheint es zielführend, das metalogische System in die Gegenstandslogik zu verschieben.

Zu den herkömmlichen Junktoren wird $\Box_\Gamma A$ hinzugefügt, mit der Bedeutung $\Gamma \vdash A$. Die klassische Semantik wird daraufhin entsprechend erweitert um

$$\begin{aligned}(\mathscr{I} \models \Box_\Gamma A) &:\Leftrightarrow (\forall \mathscr{I}' \colon (\mathscr{I}' \models \Gamma) \to (\mathscr{I}' \models A))\\ &\Leftrightarrow (\Gamma \models A).\end{aligned}$$

Folgende Idee: Angenommen, das metalogische System beschreibt dieselbe Logik wie die Gegenstandslogik, dann erscheint es zielführend, das metalogische System in die Gegenstandslogik zu verschieben.

Zu den herkömmlichen Junktoren wird $\Box_\Gamma A$ hinzugefügt, mit der Bedeutung $\Gamma \vdash A$. Die klassische Semantik wird daraufhin entsprechend erweitert um

$$\begin{aligned}(\mathscr{I} \models \Box_\Gamma A) &:\Leftrightarrow (\forall \mathscr{I}' : (\mathscr{I}' \models \Gamma) \to (\mathscr{I}' \models A))\\ &\Leftrightarrow (\Gamma \models A).\end{aligned}$$

Die einzigen beiden Schlussregeln seien

$$\frac{\vdash A \to B \qquad \vdash A}{\vdash B}, \qquad \frac{\vdash A}{\vdash \Box_\Gamma A}.$$

Wir notieren nun die herkömmlichen Schlussregeln als Axiomenschemata. Das wären

$$\Box_{\Gamma,A} B \to \Box_\Gamma (A \to B), \qquad \text{(SE: Subjunktionseinführung)}$$
$$\Box_\Gamma (A \to B) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B. \qquad \text{(SB: Subjunktionsbeseitigung)}$$

Wir notieren nun die herkömmlichen Schlussregeln als Axiomenschemata. Das wären

$$\begin{aligned}
&\Box_{\Gamma,A} B \to \Box_\Gamma (A \to B), && \text{(SE: Subjunktionseinführung)}\\
&\Box_\Gamma (A \to B) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B. && \text{(SB: Subjunktionsbeseitigung)}
\end{aligned}$$

Außerdem zur steht zur Verfügung,

$$\begin{aligned}
&\Box_A A, && \text{(GS: Grundsequenz)}\\
&\Box_\Gamma A \to \Box_{\Gamma,\Gamma'} A, && \text{(Abs: Abschwächung)}\\
&\Box_\emptyset A \to A. && \text{(Lift)}
\end{aligned}$$

Wir notieren nun die herkömmlichen Schlussregeln als Axiomenschemata. Das wären

$$\begin{array}{ll} \Box_{\Gamma,A} B \to \Box_\Gamma (A \to B), & \text{(SE: Subjunktionseinführung)} \\ \Box_\Gamma (A \to B) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B. & \text{(SB: Subjunktionsbeseitigung)} \end{array}$$

Außerdem zur steht zur Verfügung,

$$\begin{array}{ll} \Box_A A, & \text{(GS: Grundsequenz)} \\ \Box_\Gamma A \to \Box_{\Gamma,\Gamma'} A, & \text{(Abs: Abschwächung)} \\ \Box_\emptyset A \to A. & \text{(Lift)} \end{array}$$

Zunächst einmal benötigen wir die metalogischen Entsprechungen der »Schlussregeln«. Ist $A \to B$ eine »Schlussregel«, benötigen wir $\Box_\Delta A \to \Box_\Delta B$. Dies bereitet keine großen Schwierigkeiten. Die Herleitung ist

Wir notieren nun die herkömmlichen Schlussregeln als Axiomenschemata. Das wären

$$\begin{aligned} &\Box_{\Gamma,A}B \to \Box_\Gamma(A \to B), && \text{(SE: Subjunktionseinführung)}\\ &\Box_\Gamma(A \to B) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B. && \text{(SB: Subjunktionsbeseitigung)} \end{aligned}$$

Außerdem zur steht zur Verfügung,

$$\begin{aligned} &\Box_A A, && \text{(GS: Grundsequenz)}\\ &\Box_\Gamma A \to \Box_{\Gamma,\Gamma'}A, && \text{(Abs: Abschwächung)}\\ &\Box_\emptyset A \to A. && \text{(Lift)} \end{aligned}$$

Zunächst einmal benötigen wir die metalogischen Entsprechungen der »Schlussregeln«. Ist $A \to B$ eine »Schlussregel«, benötigen wir $\Box_\Delta A \to \Box_\Delta B$. Dies bereitet keine großen Schwierigkeiten. Die Herleitung ist

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box_\Delta(A \to B)} \qquad \dfrac{}{\vdash \Box_\Delta(A \to B) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B}}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B}.$$

Für »Schlussregeln« mit zwei Prämissen würden wir aber gerne das Theorem

$$\Box_\Gamma(A \to B \to C) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B \to \Box_\Gamma C \qquad \text{(SBB)}$$

zur Verfügung haben.

Für »Schlussregeln« mit zwei Prämissen würden wir aber gerne das Theorem

$$\Box_\Gamma(A \to B \to C) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B \to \Box_\Gamma C \qquad \text{(SBB)}$$

zur Verfügung haben. Dazu wird zunächst der Hilfssatz

$$\Box_\Delta \Box_\Gamma(A \to B) \to \Box_\Delta(\Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B) \qquad \text{(HSB)}$$

abgeleitet. Die Herleitung ist

Für »Schlussregeln« mit zwei Prämissen würden wir aber gerne das Theorem

$$\Box_\Gamma(A \to B \to C) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B \to \Box_\Gamma C \qquad \text{(SBB)}$$

zur Verfügung haben. Dazu wird zunächst der Hilfssatz

$$\Box_\Delta \Box_\Gamma(A \to B) \to \Box_\Delta(\Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B) \qquad \text{(HSB)}$$

abgeleitet. Die Herleitung ist

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \Box_\Gamma(A \to B) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B}}{\vdash \Box_\Delta(\Box_\Gamma(A \to B) \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B)} \qquad \dfrac{}{\vdash \Box_\Delta(A' \to B') \to \Box_\Delta A' \to \Box_\Delta B'}}{\vdash \Box_\Delta \Box_\Gamma(A \to B) \to \Box_\Delta(\Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B)}$$

mit

$$A' := \Box_\Gamma(A \to B),$$
$$B' := (\Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B).$$

Insofern A,B ausschweifend werden, bietet es sich an, die Schreibweise

$$\frac{\vdash A}{\vdash B}\,\mathrm{T} \quad \text{als Abkürzung für} \quad \frac{\dfrac{}{\vdash A \to B} \qquad \vdash A}{\vdash B}$$

zu nutzen, wobei T den Name des Theoremschemas meint, aus dem das Theorem $A \to B$ hervorgeht.

Insofern A,B ausschweifend werden, bietet es sich an, die Schreibweise

$$\frac{\vdash A}{\vdash B}\,\mathrm{T} \quad \text{als Abkürzung für} \quad \frac{\overline{\vdash A \to B} \qquad \vdash A}{\vdash B}$$

zu nutzen, wobei T den Name des Theoremschemas meint, aus dem das Theorem $A \to B$ hervorgeht. Analog

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash C}\,\mathrm{T} \quad \text{für} \quad \dfrac{\dfrac{\overline{\vdash A \to B \to C} \qquad \vdash A}{\vdash B \to C} \qquad \vdash B}{\vdash C}$$

wobei T das Schema meint, aus dem $A \to B \to C$ hervorgeht.

Es findet sich

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\square_{A'}\square_\Gamma(A \to B \to C)}\,\text{GS}
}{\square_{A',B'}\square_\Gamma(A \to B \to C)}\,\text{Abs}
}{\square_{A',B'}(\square_\Gamma A \to \square_\Gamma(B \to C))}\,\text{HSB}
}{\square_{A',B'}\square_\Gamma A \to \square_{A',B'}\square_\Gamma(B \to C)}\,\text{SB}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\square_{B'}\square_\Gamma A}\,\text{GS}
}{\square_{A',B'}\square_\Gamma A}\,\text{Abs}
}{\vdash \square_{A',B'}\square_\Gamma(B \to C)}
}{\vdash \square_{A',B'}(\square_\Gamma B \to \square_\Gamma C)}\,\text{HSB}
}{\vdash \square_{A'}(\square_\Gamma A \to \square_\Gamma B \to \square_\Gamma C)}\,\text{SE}
}{\vdash \square_\emptyset(\square_\Gamma(A \to B \to C) \to \square_\Gamma A \to \square_\Gamma B \to \square_\Gamma C)}\,\text{SE}
}{\vdash \square_\Gamma(A \to B \to C) \to \square_\Gamma A \to \square_\Gamma B \to \square_\Gamma C}\,\text{Lift}
$$

mit

$$A' := \square_\Gamma(A \to B \to C),$$
$$B' := \square_\Gamma A.$$

Zu jeder »Schlussregel« der Form $A \to B \to C$ gelingt nun die Herleitung

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A \to B \to C}{\vdash \Box_\Delta(A \to B \to C)}}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C}\,\text{SBB}.$$

Zu jeder »Schlussregel« der Form $A \to B \to C$ gelingt nun die Herleitung

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A \to B \to C}{\vdash \Box_\Delta(A \to B \to C)}}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C}\,\text{SBB}.$$

Folgende Konvention. Ist T der Name des als Schlussregel aufgefassten Theoremschemas $A \to B$, so sei MT der Name des Theoremschemas $\Box_\Delta A \to \Box_\Delta B$.

Ist T entsprechend der Name für $A \to B \to C$, so sei MT der Name für $\Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C$.

Übrigens können wir diese zulässigen Regeln

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B}, \qquad \frac{\vdash A \to B \to C}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C}$$

nun ebenfalls als Theoremschemata ausdrücken. Hierzu findet sich

$$\begin{aligned} &\Box_\emptyset(A \to B) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B, && \text{(ME1: Metaregeleinführung, 1 Prämisse)} \\ &\Box_\emptyset(A \to B \to C) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C. && \text{(ME2: Metaregeleinführung, 2 Prämissen)} \end{aligned}$$

Übrigens können wir diese zulässigen Regeln

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B}, \qquad \frac{\vdash A \to B \to C}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C}$$

nun ebenfalls als Theoremschemata ausdrücken. Hierzu findet sich

$$\begin{array}{ll} \Box_\emptyset(A \to B) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B, & \text{(ME1: Metaregeleinführung, 1 Prämisse)} \\ \Box_\emptyset(A \to B \to C) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C. & \text{(ME2: Metaregeleinführung, 2 Prämissen)} \end{array}$$

Die Herleitung von ME1 ist zum Beispiel

Übrigens können wir diese zulässigen Regeln

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B}, \qquad \frac{\vdash A \to B \to C}{\vdash \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C}$$

nun ebenfalls als Theoremschemata ausdrücken. Hierzu findet sich

$$\Box_\emptyset(A \to B) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B, \qquad \text{(ME1: Metaregeleinführung, 1 Prämisse)}$$
$$\Box_\emptyset(A \to B \to C) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B \to \Box_\Delta C. \quad \text{(ME2: Metaregeleinführung, 2 Prämissen)}$$

Die Herleitung von ME1 ist zum Beispiel

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash \Box_{\Box_\emptyset(A\to B)}\Box_\emptyset(A \to B)}\,\text{GS}}{\vdash \Box_{\Box_\emptyset(A\to B)}\Box_\Delta(A \to B)}\,\text{MAbs}}{\vdash \Box_{\Box_\emptyset(A\to B)}(\Box_\Delta A \to \Box_\Delta B)}\,\text{MSB}}{\vdash \Box_\emptyset(\Box_\emptyset(A \to B) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B)}\,\text{SE}}{\vdash \Box_\emptyset(A \to B) \to \Box_\Delta A \to \Box_\Delta B}\,\text{Lift.}$$

Wir können nun die Schnittregel als Theoremschema

$$\Box_{\Gamma, A} B \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B$$

herleiten. Es findet sich

Wir können nun die Schnittregel als Theoremschema

$$\Box_{\Gamma,A} B \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B$$

herleiten. Es findet sich

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash \Box_{\Box_{\Gamma,A}B} \Box_{\Gamma,A} B}\,\text{GS}}{\vdash \Box_{\Box_{\Gamma,A}B} \Box_\Gamma (A \to B)}\,\text{MSE}}{\vdash \Box_{\Box_{\Gamma,A}B} (\Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B)}\,\text{MSB}}{\vdash \Box_\varnothing (\Box_{\Gamma,A} B \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B)}\,\text{SE}}{\vdash \Box_{\Gamma,A} B \to \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B}\,\text{Lift.}$$

Nun sind wir befähigt, die am Anfang beschriebene Herleitung zu formalisieren. Aus dem Axiom $\Box_{A,B}(A\land B)$ soll mithilfe der »Schnittregel« die »Regel«

$$\Box_\Gamma A\to\Box_\Gamma B\to\Box_\Gamma(A\land B)$$

abgeleitet werden. Es findet sich der Herleitungsbaum

Nun sind wir befähigt, die am Anfang beschriebene Herleitung zu formalisieren. Aus dem Axiom $\Box_{A,B}(A \wedge B)$ soll mithilfe der »Schnittregel« die »Regel«

$$\Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B \to \Box_\Gamma(A \wedge B)$$

abgeleitet werden. Es findet sich der Herleitungsbaum

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_{A,B}(A \wedge B)$}
\RightLabel{Abs}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_{\Gamma,A,B}(A \wedge B)$}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_\Delta \Box_{\Gamma,A,B}(A \wedge B)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{GS}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_{\Box_\Gamma B} \Box_\Gamma B$}
\RightLabel{MAbs}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_{\Box_\Gamma B} \Box_{\Gamma,A} B$}
\RightLabel{Abs}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_\Delta \Box_{\Gamma,A} B$}
\RightLabel{MSchnitt}
\BinaryInfC{$\vdash \Box_\Delta \Box_{\Gamma,A}(A \wedge B)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{GS}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_{\Box_\Gamma A} \Box_\Gamma A$}
\RightLabel{Abs}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_\Delta \Box_\Gamma A$}
\RightLabel{MSchnitt}
\BinaryInfC{$\vdash \Box_\Delta \Box_\Gamma (A \wedge B)$}
\RightLabel{SE}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_{\Box_\Gamma A}(\Box_\Gamma B \to \Box_\Gamma(A \wedge B))$}
\RightLabel{SE}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_\emptyset(\Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B \to \Box_\Gamma(A \wedge B))$}
\RightLabel{Lift}
\UnaryInfC{$\vdash \Box_\Gamma A \to \Box_\Gamma B \to \Box_\Gamma(A \wedge B)$}
\end{prooftree}
$$

mit $\Delta := \{\Box_\Gamma A, \Box_\Gamma B\}$.

Da ist schon ein wenig umständlich. Wo die restlichen »Regeln« des natürlichen Schließens zur Verfügung stehen, kann man alternativ

$$\Box_{\emptyset}(A \to B \to A \wedge B)$$

herleiten, und gelangt damit via ME2 kurzerhand zu

$$\Box_{\Gamma} A \to \Box_{\Gamma} B \to \Box_{\Gamma}(A \wedge B).$$

Eine Vereinfachung

Zu $\Gamma = \{H_1, \ldots, H_n\}$ setzen wir $H := H_1 \wedge \ldots \wedge H_n$ und dürfen $\Box_\Gamma A$ überall gegen $\Box_H A$ ersetzen, da diese beiden Formeln äquivalent sind.

Zu $\Gamma = \{H_1, \ldots, H_n\}$ setzen wir $H := H_1 \wedge \ldots \wedge H_n$ und dürfen $\Box_\Gamma A$ überall gegen $\Box_H A$ ersetzen, da diese beiden Formeln äquivalent sind.

Weiterhin sind $\Box_H A$ und $\Box_\emptyset (H \to A)$ äquivalent, womit $\Box_H A$ überall gegen $\Box_\emptyset (H \to A)$ ersetzt werden darf.

Zu $\Gamma = \{H_1, \ldots, H_n\}$ setzen wir $H := H_1 \wedge \ldots \wedge H_n$ und dürfen $\Box_\Gamma A$ überall gegen $\Box_H A$ ersetzen, da diese beiden Formeln äquivalent sind.

Weiterhin sind $\Box_H A$ und $\Box_\emptyset(H \to A)$ äquivalent, womit $\Box_H A$ überall gegen $\Box_\emptyset(H \to A)$ ersetzt werden darf.

Es wird $\Box A := \Box_\emptyset A$ geschrieben, da dies weniger umständlich ist.

Die Einführung und Beseitigung der Subjunktion wird nun beschrieben durch

$$\Box(H \land A \to B) \to \Box(H \to A \to B),$$
$$\Box(H \to A \to B) \to \Box(H \to A) \to \Box(H \to B).$$

Die Einführung und Beseitigung der Subjunktion wird nun beschrieben durch

$$\Box(H \land A \to B) \to \Box(H \to A \to B),$$
$$\Box(H \to A \to B) \to \Box(H \to A) \to \Box(H \to B).$$

Sie geben sich nun als nezessisierte Formen der Schemata

$$(H \land A \to B) \to (H \to A \to B),$$
$$(H \to A \to B) \to (H \to A) \to (H \to B)$$

zu erkennen.

Außerdem bestehen die Schemata

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B),$$

$$\Box A \to A,$$

$$\Box A \to \Box\Box A.$$

Außerdem bestehen die Schemata

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B),$$
$$\Box A \to A,$$
$$\Box A \to \Box\Box A.$$

Dies sind die Axiome der Modallogik S4.

Das letzte Schema darin ist neu, aber intuitiv verständlich: Wenn A ein Theorem ist, ist es auch ein Theorem, dass A ein Theorem ist.

Das letzte Schema darin ist neu, aber intuitiv verständlich: Wenn A ein Theorem ist, ist es auch ein Theorem, dass A ein Theorem ist.

Wir bleiben skeptisch, rechnen $\models (\Box A \to \Box\Box A)$ lieber nach.

Das letzte Schema darin ist neu, aber intuitiv verständlich: Wenn A ein Theorem ist, ist es auch ein Theorem, dass A ein Theorem ist.

Wir bleiben skeptisch, rechnen $\models (\Box A \to \Box\Box A)$ lieber nach.

Sei $\mathscr{I}$ fest, aber beliebig. Aus $\mathscr{I} \models \Box A$ ist $\mathscr{I} \models \Box\Box A$ zu folgern, also $\mathscr{I}' \models \Box A$ für jedes $\mathscr{I}'$, also $\mathscr{I}'' \models A$ für jedes $\mathscr{I}''$. Laut Prämisse gilt $\mathscr{J} \models A$ für jedes $\mathscr{J}$. Wir spezialisieren bezüglich $\mathscr{J} := \mathscr{I}''$ und sind fertig.

Bilanz

Ist dies nicht ein wenig umständlich?

Ist dies nicht ein wenig umständlich? Es mag auf den ersten Blick so erscheinen. Dagegen spricht allerdings folgendes.

- Der Aufwand konzentriert sich eigentlich nur auf die Herleitung einer Reihe von Hilfssätzen. Der Rest läuft ab wie zuvor im herkömmlichen natürlichen Schließen.
- Der Verifizierer wird eleganter, da die Zahl der Schlussregeln auf zwei reduziert wird. Gleichzeitig wird ermöglicht, durch die Wahl unterschiedlicher Axiomenschemata alternative Systeme von »Schlussregeln« aufzustellen.

Ist dies nicht ein wenig umständlich? Es mag auf den ersten Blick so erscheinen. Dagegen spricht allerdings folgendes.

- Der Aufwand konzentriert sich eigentlich nur auf die Herleitung einer Reihe von Hilfssätzen. Der Rest läuft ab wie zuvor im herkömmlichen natürlichen Schließen.
- Der Verifizierer wird eleganter, da die Zahl der Schlussregeln auf zwei reduziert wird. Gleichzeitig wird ermöglicht, durch die Wahl unterschiedlicher Axiomenschemata alternative Systeme von »Schlussregeln« aufzustellen.

Allerdings ist diese Metalogik recht schwach. Es können nur ableitbare Schlussregeln hergeleitet werden, nicht aber andere denkbare zulässige. Eine Regel wird zulässig genannt, wenn es ein Verfahren gibt, dass diese auf die Anwendung der verfügbaren Regeln zurückführt. Zur Konstruktion so eines Verfahrens müsste aber strukturelle Induktion über den Aufbau von Formeln und Beweisen zur Verfügung stehen. Damit einhergehend wäre wohl zudem ein Rattenschwanz an Hilfsbegriffen und Mechanismen erforderlich.