Kategorientheorie

Was ist eine Kategorie?

- Ein ganz normales Axiomensystem das auf der Prädikatenlogik aufbaut.
- Man verkettet Morphismen, ganz analog wie Abbildungen verkettet werden.
- Die Verkettung von Morphismen hat Axiome analog zu denen eines Monoids.

Also nichts neues. Alles schon gewohnt.

Ist das nicht zu einfach? Ein Monoid $(M, \circ)$ hat nur die Axiome

- Assoziativität: $\forall_{a,b,c \in M}((a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c))$,
- neutrales Element existiert: $\exists_{e \in M} \forall_{a \in M}(a \circ e = e \circ a = a)$.

Eine Kategorie ist ein Tripel $C = (\mathrm{ob}, \mathrm{hom}, \circ)$. Die Teilstruktur $(\mathrm{hom}, \circ)$ hat die »Monoid-Axiome«. Man bezeichnet $g \circ f$ für $f, g \in \mathrm{hom}$ als Verkettung.

Die Elemente der Klasse ob nennt man Objekte. Wenn die Klasse bezüglich der Morphismen und Verkettung dieser eine Kategorie bildet, spricht man von der Kategorie dieser Objekte.

Die Klasse hom besteht aus allen Morphismen zwischen Objekten. Speziell für zwei Objekte $A, B \in \text{ob}$ ist $\text{hom}(A, B)$ die Klasse aller Morphismen $f : A \to B$.

Wie gesagt gilt für $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ das Assoziativgesetz:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Für jedes Objekt X existiert die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$, so dass

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Man kann zeigen dass die Identität für jedes Objekt eindeutig bestimmt ist.
Wir wollen uns damit jetzt nicht aufhalten.

Das einfachste Beispiel für eine Kategorie ist die Kategorie der Mengen mit den Abbildungen als Morphismen und der gewöhnlichen Verkettung von Abbildungen. Sei $\mathrm{ob} = \Omega$ die Klasse aller Mengen, sei $\mathrm{hom} = \mathrm{Abb}$ die Klasse aller Abbildungen und $\mathrm{hom}(A, B) = \mathrm{Abb}(A, B)$. Dann ist

$$\mathbf{Set} = (\Omega, \mathrm{Abb}, \circ)$$

eine Kategorie.

Sei Ω die Klasse aller Gruppen. Für $G, H \in \Omega$ sei $\hom(G,H)$ die Klasse der Gruppenhomomorphismen. Die Verkettung sei die gewöhnliche Verkettung. Dann ist

$$\mathbf{Group} = (\Omega, \hom, \circ)$$

eine Kategorie.

Sei K ein Körper und Ω_K die Klasse aller Vektorräume über dem Körper. Für $V, W \in \Omega_K$ sei $\hom(V, W)$ die Klasse der linearen Abbildungen von V nach W, d. h. der Vektorraum-Homomorphismen. Sei die Verkettung die gewöhnliche Verkettung. Dann ist

$$\mathbf{Vect}_K = (\Omega_K, \hom, \circ)$$

eine Kategorie.

Es ist so, dass in den Vektorräumen die Struktur von Gruppen enthalten ist und in den Gruppen die Struktur von Mengen. Um das zu präzisieren muss der Begriff *Funktor* eingeführt werden. Wir brauchen einen sogenannten Vergissfunktor, um Struktur zu vergessen bzw. zu entfernen.

Sind C, D Kategorien, dann nennt man $F\colon C \to D$ kovarianten Funktor, wenn

- jedem Objekt $X \in \mathrm{ob}(C)$ ein Objekt $F(X) \in \mathrm{ob}(D)$ zugeordent wird,
- jedem Morphismus $f \in \mathrm{hom}_C(X, Y)$ ein Morphismus $F(f) \in \mathrm{hom}_D(F(X), F(Y))$ zugeordnet wird,

so dass die folgenden beiden Verträglichkeitsaxiome erfüllt sind:

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$,
- $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Bemerkung: Die Notation ist überladen. Die Zuordnung

$$F\colon \operatorname{ob}(C) \to \operatorname{ob}(D)$$

ist eigentlich zu unterscheiden von

$$\tilde{F}\colon \hom_C(X,Y) \to \hom_D(F(X),F(Y)).$$

Das Paar $(F,\tilde{F})$ kodiert dann eigentlich den Funktor $C \to D$.

Ab nun schreiben wir aber $F = \tilde{F} = (F,\tilde{F})$, da der Leser weiß was gemeint ist, wenn er das Wort Funktor liest.

Noch eine Bemerkung: Die Verträglichkeitsaxiome lassen F ausschauen wie einen Homomorphismus zwischen Monoiden. Es kann gut möglich sein, dass die Klasse der Morphismen mit den Funktoren als Morphismen selbst wieder eine Kategorie bildet.

Der Vergissfunktor von der Gruppenkategorie zur Mengenkategorie wird wie folgt definiert:

$$F\colon \mathbf{Group} \to \mathbf{Set}, \quad F((G,*,e)) := G,$$

und jedem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon (G,*,e) \to (G',*',e')$$

wird die Abbildung

$$F(\varphi)\colon G \to G', \quad F(\varphi)(x) := \varphi(x)$$

zugeordnet.

Der Vergissfunktor ist tatsächlich ein kovarianter Funktor.

Beweis. Es gilt $F(\mathrm{id})(x) = \mathrm{id}(x)$, und daher $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} F(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) = \varphi_2(\varphi_1(x)) \\ &= F(\varphi_2)(F(\varphi_1)(x)) \\ &= (F(\varphi_2) \circ F(\varphi_1))(x), \end{aligned}$$

und daher

$$F(\varphi_2 \circ \varphi_1) = F(\varphi_2) \circ F(\varphi_1). \quad \square$$

Es ergibt sich das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(G, *, e) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, mapsto, "F"] & (G', *', e') \arrow[d, mapsto, "F"] \\
G \arrow[r, "F(\varphi)"] & G'
\end{tikzcd}$$

Das ist aber nur eine Übersicht und kein kommutatives Diagramm, da die Pfeile von unterschiedlichem Typ sind.

Ein Funktor ordnet einem kommutierenden Diagramm ein kommutierendes Diagramm zu. Hier ergibt sich:

$$
\begin{tikzcd}
(G,*,e) \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2\circ\varphi_1"] & \\
(G',*',e') \arrow[r, "\varphi_2"'] & (G'',*'',e'')
\end{tikzcd}
\quad\longmapsto\quad
\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "F(\varphi_1)"'] \arrow[dr, "F(\varphi_2\circ\varphi_1)"] & \\
G' \arrow[r, "F(\varphi_2)"'] & G''
\end{tikzcd}
$$

Ein zweites Beispiel. Sei $P(X) = 2^X$ die Potenzmenge von X. Dann ist wie folgt ein kovarianter Funktor gegeben:

$$P\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}, \quad P(X) := 2^X,$$

mit

$$P(f)(M) := f(M).$$

Dabei ist f eine Abbildung und $f(M)$ die Bildmenge von M unter f.

Wir setzen $(g \circ f)(M) = g(f(M))$ als bekannt voraus und rechnen damit wieder nach:

$$\begin{aligned} P(g \circ f)(M) &= (g \circ f)(M) = g(f(M)) \\ &= P(g)(P(f)(M)) = (P(g) \circ P(f))(M), \end{aligned}$$

also gilt

$$P(g \circ f) = P(g) \circ P(f).$$

Die Abbildung

$$P\colon \operatorname{Abb}(X, Y) \to \operatorname{Abb}(2^X, 2^Y)$$

scheint dabei ein Einbettungsmonomorphismus zu sein.

Außerdem gilt $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ für alle Abbildungen. Daher definiert man $\eta(X)\colon X \to 2^X$ mit $\eta(X)(x) := \{x\}$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta(X)"'] & Y \arrow[d, "\eta(Y)"] \\
2^X \arrow[r, "P(f)"'] & 2^Y
\end{tikzcd}$$

Hier ordnet η jedem Objekt $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Set})$ einen Morphismus

$$\eta(X)\colon\ \mathrm{id}(X) \to P(X)$$

zu, wobei $\mathrm{id}(X) = X$ und $P(X) = 2^X$ gilt. Man schreibt dann auch $\eta\colon\ \mathrm{id} \to P$ und bezeichnet η als natürliche Transformation.

Seien C, D Kategorien und $F, G\colon C \to D$ Funktoren. Dann schreibt man $\eta\colon F \to G$ und nennt η natürliche Transformation, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- jedes Objekt $X \in \mathrm{ob}(C)$ bekommt einen Morphismus $\eta(X)\colon F(X) \to G(X)$,
- für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ gilt $\eta(Y) \circ F(f) = G(f) \circ \eta(X)$.

Die zweite Bedingung lässt sich übersichtlich als kommutierendes Diagramm darstellen:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta(Y)"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Im Beispiel war $F = \mathrm{id}$ und $G = P$.

Ende.