

## Die Rotation im Raum mittels Clifford-Algebra

Im Folgenden wird die folgende Notation benutzt:

$\langle v, w \rangle$	Standardskalarprodukt,
$v \wedge w$	äußeres Produkt,
$vw$	Produkt der Clifford-Algebra.

Der Vektor  $\vec{r}_0$  soll um die durch den normierten Vektor  $\vec{n}$  gegebene Achse rotiert werden. Die Rotation um den Winkel  $\varphi$  lässt sich berechnen gemäß

$$\vec{r}(\varphi) = R\vec{r}_0\tilde{R}, \quad R = e^{-\hat{B}\varphi/2}, \quad \tilde{R} = e^{\hat{B}\varphi/2}. \quad (1)$$

Hierbei ist  $\hat{B}$  der Einheitsbivektor der Ebene orthogonal zu  $\vec{n}$ . Mittels Hodge-Stern-Operator gilt dann  $\hat{B} = *\vec{n}$ . Die Clifford-Algebra-Elemente  $R$  und  $\tilde{R}$  werden *Rotoren* genannt, und  $\tilde{R}$  ist die *Reversion* von  $R$ .

Allgemein für den  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$*\vec{v} = \vec{v}I_n = (-1)^{n-1}I_n\vec{v}, \quad (2)$$

wobei  $I_n = e_1e_2 \dots e_n$  der Pseudoskalar ist.

Im  $\mathbb{R}^3$  gilt also  $\vec{v}I_3 = I_3\vec{v}$ . Wir schreiben ab jetzt kurz  $I := I_3$ .

Somit ist  $\hat{B} = \vec{n}I = I\vec{n}$ .

Es gilt die Verallgemeinerung der eulerschen Formel:

$$e^{\hat{B}x} = \cos x + \hat{B} \sin x. \quad (3)$$

Es ergibt sich

$$R\vec{r}_0\tilde{R} = (\cos \frac{\varphi}{2} - \hat{B} \sin \frac{\varphi}{2})\vec{r}_0(\cos \frac{\varphi}{2} + \hat{B} \sin \frac{\varphi}{2}) \quad (4)$$

$$= (\cos \frac{\varphi}{2} - \hat{B} \sin \frac{\varphi}{2})(\vec{r}_0 \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{r}_0\hat{B} \sin \frac{\varphi}{2}) \quad (5)$$

$$= \vec{r}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \hat{B}\vec{r}_0\hat{B} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (\vec{r}_0\hat{B} - \hat{B}\vec{r}_0) \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (6)$$

$$= \vec{r}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \vec{n}I\vec{r}_0\vec{n}I \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (\vec{r}_0\vec{n}I - \vec{n}\vec{r}_0I) \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (7)$$

$$= \vec{r}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \vec{n}\vec{r}_0\vec{n}I^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (\vec{r}_0\vec{n} - \vec{n}\vec{r}_0)I \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (8)$$

Aus  $ab = \langle a, b \rangle + a \wedge b$  folgt nun aber

$$ab - ba = 2a \wedge b, \quad ab + ba = 2\langle a, b \rangle. \quad (9)$$

Daher gilt

$$(\vec{r}_0\vec{n} - \vec{n}\vec{r}_0)I = 2(\vec{r}_0 \wedge \vec{n})I = -2\vec{r}_0 \times \vec{n} = 2\vec{n} \times \vec{r}_0 \quad (10)$$

und

$$\vec{n}\vec{r}_0\vec{n} = \vec{n}(2\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle - \vec{n}\vec{r}_0) = 2\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \vec{n} - \vec{n}\vec{n}\vec{r}_0 = 2\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \vec{n} - \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \vec{r}_0, \quad (11)$$

wobei  $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$ .

Man beachtet nun  $I^2 = -1$ . Außerdem gilt

$$\cos^2(\varphi/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi), \quad (12)$$

$$\sin^2(\varphi/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi), \quad (13)$$

$$\cos(\varphi/2) \sin(\varphi/2) = \frac{1}{2} \sin \varphi. \quad (14)$$

Schließlich ergibt sich

$$R\vec{r}_0\tilde{R} = \vec{r}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (2\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \vec{n} - \vec{r}_0) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \vec{n} \times \vec{r}_0 \sin \varphi \quad (15)$$

$$= \frac{\vec{r}_0}{2}(1 + \cos \varphi) - \frac{\vec{r}_0}{2}(1 - \cos \varphi) + (1 - \cos \varphi)\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \vec{n} + \vec{n} \times \vec{r}_0 \sin \varphi \quad (16)$$

$$= \vec{r}_0 \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \vec{n} + \vec{n} \times \vec{r}_0 \sin \varphi. \quad (17)$$

Der Vorteil von Formel (1) ist, dass hiermit Rotationen im  $\mathbb{R}^n$  auch für  $n \neq 3$  beschrieben werden können. Im  $\mathbb{R}^2$  kann man den Pseudoskalar  $I_2 = e_1 e_2$  mit der imaginären Einheit identifizieren. Gemäß (2) gilt  $I_2 \vec{v} = -\vec{v} I_2$  und daher

$$z\vec{v} = (a + bI_2)\vec{v} = a\vec{v} + bI_2\vec{v} = \vec{v}a - \vec{v}bI_2 = \vec{v}(a - bI_2) = \vec{v}\bar{z}. \quad (18)$$

In der Ebene ist  $\hat{B} = I_2 = i$ . Mit (18) erhält man

$$R\vec{v}\tilde{R} = e^{-i\varphi/2}\vec{v}e^{i\varphi/2} = e^{-i\varphi/2}e^{-i/\varphi/2}\vec{v} = e^{-i\varphi}\vec{v}. \quad (19)$$

Die Anwendung einer komplexen Zahl auf einen Vektor ergibt

$$(a + bi)\vec{v} = (a + be_1e_2)\vec{v} = (a + be_1e_2)(v_1e_1 + v_2e_2) \quad (20)$$

$$= av_1e_1 + av_2e_2 - bv_1e_2 + bv_2e_1 \quad (21)$$

$$= (av_1 + bv_2)e_1 + (-bv_1 + av_2)e_2 \quad (22)$$

$$= \begin{bmatrix} av_1 + bv_2 \\ -bv_1 + av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Somit ist

$$e^{-\varphi i}\vec{v} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \vec{v}. \quad (24)$$

Speziell gilt

$$(-i)\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}. \quad (25)$$